DRGANIA MECHANICZNE

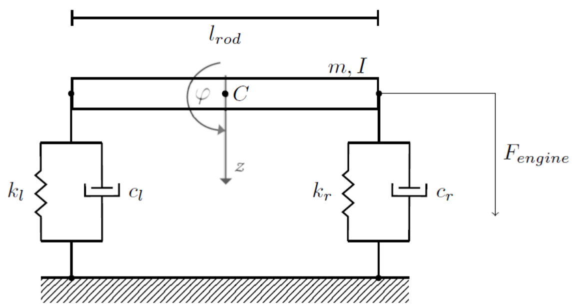
TŁUMIONE UKŁADY O WIELU STOPNIACH SWOBODY

Damped Symmetrical Vehicle Suspension z 2 St.S. dla $c_r = k_r\lambda$, $c_l = k_l\lambda$, $l_l = l_r$, $k_l = k_r$

3 lutego 2024

Schemat systemu

Ilustracja przedstawia schemat rzeczywistego obiektu mechanicznego, wyznaczony na podstawie uprzedniej analizy rzeczywistego obiektu.



Analizując przedstawiony układ można stwierdzić, że jego liczba stopni swobody to 2.

Tabelka z wartościami parametrów do obliczeń

Przyjęte do obliczeń wartości poszczególnych parametrów przedstawia tabelka 1

Tabela 1: Podstawowe wartości parametrów

Parametr	Wartość
c_r	$k_r \lambda$
c_l	$k_l \lambda$
l_l	l_r
k_l	k_r

Energia kinetyczna

Energia kinetyczna układu wyrażona jest wzorem:

$$T = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m\dot{z}^2}{2} \tag{1}$$

Wyznaczona wielkość określa energię układu wynikającą z jego własności inercyjnych (energię zmagazynowaną w elementach bezwładnych).

Energia potencjalna

Energia potencjalna układu wyrażona jest wzorem:

$$V = \frac{k_r \left(l_r\varphi - z\right)^2}{2} + \frac{k_r \left(-l_r\varphi - z\right)^2}{2} \tag{2}$$

Zaprezentowana zależność opisuje oddziaływanie potencjalnych pól sił w których znajduje się obiekt.

Dyssypacyjna funkcja Rayleigh'a

Energia rozpraszana tłumieniem wyrażona jest wzorem:

$$D = \frac{k_r\lambda \left(l_r\dot{\varphi} + \dot{z}\right)^2}{2} + \frac{k_r\lambda \left(-l_r\dot{\varphi} + \dot{z}\right)^2}{2} \tag{3}$$

Podana zależność stanowi potencjał dysynpacyjny Rayleigh'a, który poddany różniczkowaniu względem wektora prędkości uogólnionych pozwala na określenie sił wiskotycznego tłumienia.

Lagrangian układu (Funkcja Lagrange'a)

Lagrangian układu dany jest następującym wyrażeniem (4):

$$L = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m\dot{z}^2}{2} - k_r z^2 - k_r l_r^2 \varphi^2 \tag{4}$$

Równania Eulera Lagrange'a dla rozważanego przypadku są następujące:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}^{N} \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = Q_{z}^{N} \tag{6}$$

Kolejne pochodne wynikające z zastosowania równań Eulera-Lagrange'a są nastęujące:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -2k_r l_r^2 \varphi \tag{7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = -2k_r z \tag{8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I\dot{\varphi} \tag{9}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I\ddot{\varphi} \tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\ddot{z} \tag{12}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}} = 2k_r l_r^2 \lambda \dot{\varphi} \tag{13}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{z}} = 2k_r \lambda \dot{z} \tag{14}$$

Wyniki przedstawionych operacji wykorzystuje się wyznaczenia równań ruchu układu.

Równanie ruchu

Wykorzystując obliczone pochodne, wyznacza się równania ruchu na podstawie odpowiedniego wzoru. Równania ruchu układu przedstawiają zależności: (15)- (16)

$$F_{engine} l_r + I\ddot{\varphi} + F_{engine} l_r \cos(\Omega t) + 2k_r l_r^2 \varphi + 2k_r l_r^2 \lambda \dot{\varphi} = 0 \tag{15}$$

$$F_{engine} + m\ddot{z} - F_{engine} \cos(\Omega t) + 2k_r z + 2k_r \lambda \dot{z} = 0 \tag{16}$$

Wyznaczone równania stanowią matematyczny opis dynamiczny właściwości układu. Dalsza analiza pozwala na skuteczną analizę działania modelowanego obiektu i określenie jego parametrów mechanicznych.

Wyznaczanie macierzy fundamentalnej

Z równań ruchu wyznaczono macierz mas i sztywności układu::

$$M = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$K = \begin{bmatrix} 2k_r l_r^2 & 0 \\ 0 & 2k_r \end{bmatrix} \tag{18}$$

Macierz fundamentalna, na podstawie której wyznaczono równanie charakterystyczne rozważanego układu Δ, przedstawiają się następująco::

$$A = \begin{bmatrix} -I\omega^2 + 2ik_r l_r^2 \lambda\omega + 2k_r l_r^2 & 0 \\ 0 & 2ik_r \lambda\omega + 2k_r - m\omega^2 \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$\Delta = 4k_r^2 l_r^2 + Im\omega^4 - 2Ik_r\omega^2 - 4k_r^2 l_r^2 \lambda^2 \omega^2 - 2k_r l_r^2 m\omega^2 - 2iIk_r\lambda\omega^3 + 8ik_r^2 l_r^2 \lambda\omega - 2ik_r l_r^2 \lambda m\omega^3 \tag{20}$$

Macierz fundamentalna pozwala określić rozwiązanie ustalone. Natomiast bazując na równaniu charakterystycznym określa się częstości własne układu.

Rozwiązanie ogólne

Rozwiązanie ogólne przedstawia wyrażenie:

$$X_{g-\varphi(t)} = C_3 e^{-\frac{k_r l_r^2 \lambda t}{I}} \cos\left(t\sqrt{\frac{2k_r l_r^2}{I} - \frac{k_r^2 l_r^4 \lambda^2}{I^2}}\right) + C_4 e^{-\frac{k_r l_r^2 \lambda t}{I}} \sin\left(t\sqrt{\frac{2k_r l_r^2}{I} - \frac{k_r^2 l_r^4 \lambda^2}{I^2}}\right) \tag{21}$$

$$X_{g-z(t)} = C_1 e^{-\frac{k_r \lambda t}{m}} \cos\left(t\sqrt{-\frac{k_r^2 \lambda^2}{m^2} + \frac{2k_r}{m}}\right) + C_2 e^{-\frac{k_r \lambda t}{m}} \sin\left(t\sqrt{-\frac{k_r^2 \lambda^2}{m^2} + \frac{2k_r}{m}}\right) \tag{22}$$

Rozwiązanie ogólne opisuje ruch analizowanego układu (przedstawia przemieszczenie w funkcji czasu) i wynika z rozważań dotyczących drgań swobodnych układu.

Rozwiązanie szczególne

Rozwiązanie szczególne dane jest następującym wyrażeniem:

$$X_{s-\varphi(t)} = -\frac{0.5F_{engine}}{k_r l_r} - \frac{F_{engine} l_r \left(-\Omega^2 + \frac{2.0 k_r l_r^2}{I}\right) \cos(\Omega t)}{I \left(4.0 \left(-0.5\Omega^2 + \frac{k_r l_r^2}{I}\right)^2 + \frac{4.0\Omega^2 k_r^2 l_r^4 \lambda^2}{I^2}\right)} - \frac{2.0 F_{engine} \Omega k_r l_r^3 \lambda \sin(\Omega t)}{I^2 \left(4.0 \left(-0.5\Omega^2 + \frac{k_r l_r^2}{I}\right)^2 + \frac{4.0\Omega^2 k_r^2 l_r^4 \lambda^2}{I^2}\right)} \tag{23}$$

$$X_{s-z(t)} = \frac{0.5F_{engine}}{k_r} + \frac{F_{engine} \left(-\Omega^2 + \frac{2.0k_r}{m}\right) \cos(\Omega t)}{m \left(\frac{4.0\Omega^2 k_r^2 \lambda^2}{m^2} + 4.0 \left(-0.5\Omega^2 + \frac{k_r}{m}\right)^2\right)} + \frac{2.0 F_{engine} \Omega k_r \lambda \sin(\Omega t)}{m^2 \left(\frac{4.0\Omega^2 k_r^2 \lambda^2}{m^2} + 4.0 \left(-0.5\Omega^2 + \frac{k_r}{m}\right)^2\right)} \tag{24}$$

Rozwiązanie szczególne układu przedstawia zależność położenia od czas odpowiednią dla drgań wymuszonych